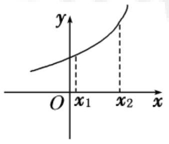
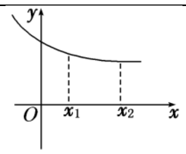
学大教育个性化教案

科 目	数学	**年级**	高一	**教师姓名**	郝老师
学员姓名	李同学	**性 别**	男	**校区**	健康路校区
就读学校	省实验文博	**教材版本**	人教版	**课时时长（分钟）**	120
授课日期	2020 年 9 月 13 日		**授课时间**	15：00-17：00	
课题	函数的单调性				
教学目标	1. 掌握利用函数图象和单调性定义判断、证明函数单调性的方法． 2. 通过对函数单调性定义的探究，渗透数形结合的思想方法；通过对单调性的代数证明，提高学生的推理论证能力．				
教学重点	1. 函数单调性的概念、判断与应用．				
教学难点	1. 函数单调性的概念、判断与应用．				

一、课前预习

<table>
<tr><td></td><td>增函数</td><td>减函数</td></tr>
<tr><td rowspan="2">定义
（符号语言）</td><td colspan="2">设函数 $f(x)$ 的定义域为 I.如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1,x_2</td></tr>
<tr><td>当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数</td><td>当 $x_1<x_2$ 时，都 $f(x_1)>f(x_2)$ ，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是减函数</td></tr>
<tr><td>图象语言</td><td>
自左向右看图象逐渐上升</td><td>
自左向右看图象逐渐下降</td></tr>
<tr><td>文字语言</td><td>y 随 x 的增大而增大</td><td>y 随 x 的增大而减小</td></tr>
</table>

二、热身

1. 已知函数 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 在区间 $(-\infty，4]$ 上是减函数，则实数 a 的取值范围为________.

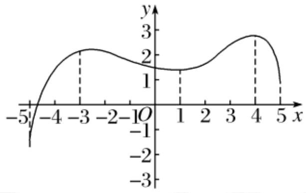
【答案】 $(-\infty，-3]$

【解析】 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 的开口方向向上，对称轴为 $x=1-a$，

$\because f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 在区间 $(-\infty，4]$ 上是减函数，$\therefore 4\le 1-a$，$\therefore a\le -3$，

$\therefore a$ 的取值范围是 $(-\infty，-3]$.

2. 如图是定义在区间 $[-5,5]$ 上的函数 $y=f(x)$，则下列关于函数 $f(x)$ 的说法错误的是(　　)



A．函数在区间 $[-5，-3]$ 上单调递增

B．函数在区间 $[1,4]$ 上单调递增

C．函数在区间 $[-3,1]\cup[4,5]$ 上单调递减

D．函数在区间 $[-5,5]$ 上没有单调性

【答案】 C

【解析】 单调区间不能用“∪”连接.

3．下列函数中，在区间 $(0,2)$ 上为增函数的是(　　)

A．$y=3-x$

B．$y=x^2+1$

C．$y=\dfrac{1}{x}$

D．$y=-|x+1|$

【答案】 B

【解析】 $y=x^2+1$ 在 $(0,2)$ 上是增函数.

4．若 $y=(2k-1)x+b$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，则有(　　)

A．$k>\dfrac{1}{2}$

B．$k>-\dfrac{1}{2}$

C．$k<\dfrac{1}{2}$

D．$k<-\dfrac{1}{2}$

【答案】 C

三、导课

1、观察引入

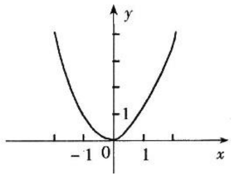
观察下面两个函数的图象，分析函数值随 x 变化的规律

（1） 函数 $y=2x$；（2）函数 $y=-2x$

设计意图：由初中知识自然过渡到今天要学的知识，对初中知识进行深化，激起学生新的认知冲突，从而调动学生积极性.

2、步步深化

观察函数 $y=x^2$ 的图象，设置启发式问题：



在 y 轴的右侧部分图象具有什么特点？

（1）指出在 y 轴的右侧部分自变量与函数值的变化规律？

（2）如果在 y 轴右侧部分取两个点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，当 $x_1<x_2$ 时，y_1，y_2 的大小关系如何？是不是在定义域内任取两个点都有这个规律呢？

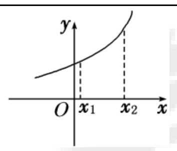
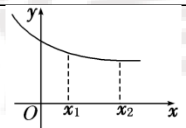
（3）如何用数学符号语言来描述这个规律？

（4）反过来，如果 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，我们能不能得到自变量与函数值的变化规律呢？

类似地分析图象在 y 轴的左侧部分。

四、授课内容与典型例题

知识点 1 单调函数的定义

	增函数	**减函数**
定义（符号语言）	设函数 $f(x)$ 的定义域为 I.如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1,x_2	
	当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数	当 $x_1<x_2$ 时，都 $f(x_1)>f(x_2)$ ，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是减函数
图象语言	 自左向右看图象逐渐上升	 自左向右看图象逐渐下降
文字语言	y 随 x 的增大而增大	y 随 x 的增大而减小

单调性定义的两种变式：

设任意 $x_1,x_2\in[a,b]$ 且 $x_1<x_2$，那么

① $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0 \Leftrightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是增函数；

$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0 \Leftrightarrow f(x)$在$[a,b]$上是减函数.

② $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0 \Leftrightarrow f(x)$在$[a,b]$上是增函数;

$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0 \Leftrightarrow f(x)$在$[a,b]$上是减函数.

知识点 2 单调区间的定义

若函数$y=f(x)$在区间D上是增函数或减函数，则称函数$y=f(x)$在这一区间上具有(严格的)单调性，区间D叫做$y=f(x)$的单调区间.

1. 增函数与减函数：设函数$y=f(x)$的定义域为I，如果对于定义域I内的某个区间D内的任意两个自变量x_1,x_2，当$x_1<x_2$时，都$f(x_1)<f(x_2)$，那么就说$y=f(x)$在区间D上是增函数. 仿照增函数的定义可定义减函数.

2. 单调区间：如果函数$f(x)$在某个区间D上是增函数或减函数，就说$f(x)$在这一区间上具有（严格的）单调性，区间D叫$f(x)$的单调区间. 在单调区间上，增函数的图象是从左向右是上升的，减函数的图象从左向右是下降的. 由此，可以直接观察函数图象上升与下降的变化趋势，得到函数的单调区间及单调性.

应该强调：函数的单调性是函数的局部性质，也就是说函数有可能在不同的区间上具有不同的单调性. 举几个函数图象的例子来说明即可.

3. 判断单调性的步骤：

①设自变量：设给定区间上的x_1,x_2，且$x_1<x_2$；

②作差比较大小：计算$f(x_1)-f(x_2)$；

③定号：判断差的符号；

④下结论.

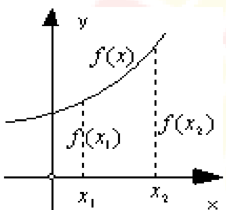


图 1

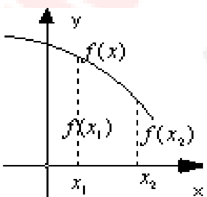


图 2

例题 1 求证：函数$f(x)=\frac{1}{x^2}$在$(0,+\infty)$上是减函数，在$(-\infty,0)$上是增函数.

【解析】 对于任意的 x_1，$x_2\in(-\infty,0)$，且 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_2^2-x_1^2}{x_1^2x_2^2}=\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{x_1^2x_2^2}$.∵$x_1<x_2<0$，

∴$x_2-x_1>0$，$x_1+x_2<0$，$x_1^2x_2^2>0$.∴$f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$.

∴函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$在$(-\infty，0)$上是增函数．对于任意的 x_1，$x_2\in(0，+\infty)$，且 $x_1<x_2$，有

$f(x_1)-f(x_2)=\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{x_1^2x_2^2}$.∵$0<x_1<x_2$，∴$x_2-x_1>0$，$x_2+x_1>0$，$x_1^2x_2^2>0$.

∴$f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$．∴函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$在$(0，+\infty)$上是减函数．

例题 2 函数 $f(x)$ 对任意的 m、$n\in R$，都有 $f(m+n)=f(m)+f(n)-1$，并且 $x>0$ 时，恒有 $f(x)>1$.

(1)求证：$f(x)$ 在 R 上是增函数；

(2)若 $f(3)=4$，解不等式 $f(a^2+a-5)<2$.

【解析】(1)证明　设 x_1，$x_2\in R$，且 $x_1<x_2$，∴ $x_1-x_2>0$，∵当 $x>0$ 时，$f(x)>1$，∴ $f(x_2-x_1)>1$.

$f(x_2)=f[(x_2-x_1)+x_1]=f(x_2-x_1)+f(x_1)-1$，

所以 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1)-1>0\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

∴ $f(x)$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上为增函数.

(2)解　∵ $\boldsymbol{m,n\in R}$，不妨设 $m=n=1$，

$f(1+1)=f(1)+f(1)-1\Rightarrow f(2)=2f(1)-1$.①

$f(3)=4\Rightarrow f(2+1)=4\Rightarrow f(2)+f(1)-1=4$②

由①②可得 $f(1)=2$，所以 $f(a^2+a-5)<2$ 也即 $f(a^2+a-5)<f(1)$

∵ $f(x)$ 在 R 上为增函数，∴ $a^2+a-5<1$，解得 $-3<a<2$

即 $a\in(-3,2)$.

例题 3 若 $f(x)$ 为 R 上的增函数，则满足 $f(2-m)<f(m^2)$ 的实数 m 的取值范围是________.

【答案】$m>1$ 或 $m<-2$.

【解析】∵ $f(x)$ 在 R 上为增函数，所以 $f(2-m)<f(m^2)$ 等价于 $2-m<m^2$.解得 $m>1$ 或 $m<-2$.

例题 4 下列函数 $f(x)$中，满足“任意 x_1，$x_2\in(0，+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$，$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0$”的是(　　)

A．$f(x)=\frac{1}{x}-x$　　　　B．$f(x)=x^3$

C．$f(x)=\ln x$　　　　D．$f(x)=2x$

【答案】A

【解析】“任意 x_1，$x_2\in(0，+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$，$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0$”等价于函数为减函数，四个选项中，只

有 A 选项符合.

例题 5 函数 $f(x)=\sqrt{x^2-2x-8}$的单调递增区间是(　　)

A．$(-\infty,\ -2]$　　　　B．$(-\infty,\ 1]$

C．$[1,\ +\infty)$　　　　D．$[4,\ +\infty)$

【答案】D

【解析】$x^2-2x-8\geq0$ 得 $x\geq4$ 或 $x\leq-2$，令 $x^2-2x-8=t$，则 $y=\sqrt{t}$为增函数，

∴$t=x^2-2x-8$ 在$[4,\ +\infty)$上的增区间便是原函数的单调递增区间，

∴原函数的单调递增区间为$[4,\ +\infty)$.

课堂应用 1 已知函数 $f(x)$ 是定义在$[1,4]$上的减函数，且 $f(m)>f(4-m)$，则实数 m 的取值范围是（　　　）

A. $(2,3]$　　B. $[1,2)$　　C. $(-\infty,2)$　　D. $(2,+\infty)$

【答案】B

【解析】由于函数是减函数，故 $f(m)>f(4-m)$等价于 $m<4-m$，注意定义域$[1,4]$，综合可得 C 正确.

课堂应用 2 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+4x, x ? 0 \\ 4x-x^2, x<0 \end{cases}$，若 $f(2-a^2)>f(a)$，则实数 a 的取值范围是（　　　）

A. $(-?\ ,\ 1)\cup(2,+?\ )$　　B. $(-1,2)$

C. $(-2,1)$　　D. $(-?\ ,\ 2)\cup(1,+?\ )$

【答案】C

【解析】画出函数 $f(x)$ 的图象，易知 $f(x)$ 在$(-?\ ,\ ?\ )$上是单调递增函数，则由 $f(2-a^2)>f(a)$得 $2-a^2>a$，解得$-2<a<1$，故答案为 C

课堂应用 3 $f(x)$ 是定义在$[-1,1]$上的增函数，解不等式 $f(1-x)<f(1-x^2)$

【答案】$(0,1)$

【解析】解不等式组$\begin{cases} 1-x<1-x^2 \\ -1 ? 1\quad x ? 1 \\ -1 ? 1\quad x^2 ? 1 \end{cases}$，得$0<x<1$.

课堂应用 4 判断函数 $f(x)=\dfrac{ax}{x+1}$ 在 $(-1,+?\ )$ 上的单调性，并证明.

【答案】见解析

【解析】设自变量，作差，对 a 进行讨论，可得

当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-1,+?\ )$ 上单调递增.

当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-1,+?\ )$ 上单调递减.

课堂应用 5 已知 $f(x)$ 为 $\boldsymbol{R}$ 上的减函数，那么满足 $f(|\dfrac{1}{x}|)<f(1)$ 的实数 x 的取值范围是(　　)

A．$(-1,1)$　　　*B*．$(0,1)$　　　*C*．$(-1,0)\cup(0,1)$　　　*D*．$(-?\ ,\ 1)\cup(1,+?\ )$

【答案】*C*

【解析】因为 $f(x)$ 为减函数，所以 $f(|\dfrac{1}{x}|)<f(1)$ 等价于 $|\dfrac{1}{x}|>1$，则 $|x|<1$ 且 $x^{1}\ \ 0$，即

$x?\ (\ \ 1,0)\cup(0,1)$.

五、课堂小结

本节讲了 2 个重要内容：

1．　函数的单调性

在课程结束时再从文字、图形、符号这三个角度进行复习巩固；

2．用定义求函数的单调区间的步骤

（1）取值：即设 x_1,x_2 是该区间内的任意两个值，且 $x_1<x_2$（当然设 $x_1>x_2$ 亦可）。

（2）作差：即 $f(x_1)-f(x_2)$ 或 $f(x_2)-f(x_1)$，并通过通分、配方、因式分解等方法，向有利于判断差的符号的方向变形，**往往需要将代数式化为乘积的形式**。

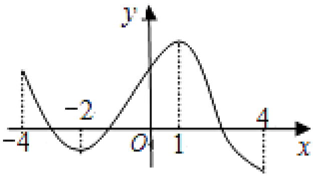
（3）定号：根据给定的区间和 x_1-x_2 的符号，确定差 $f(x_1)-f(x_2)$ 或 $f(x_2)-f(x_1)$ 的符号。当符号不确定时，可以进行分类讨论。

（4）判断：根据定义得出结论。

板书设计：

六、验收

1.函数 $y=f(x)$，$x\in[-4,4]$的图象如图所示，则函数 $f(x)$ 的所有单调递减区间为（　　）



A. $[-4,-2]$　　B. $[1,4]$

C. $[-4,-2]$和$[1,4]$　　D. $[-4,-2]\cup[1,4]$

【答案】D

【解析】图象上升的区间为增区间，下降的区间为减区间，注意单调区间用∪连接.

2.函数 $y=(2k-1)x+b$ 在$(-\infty,\infty)$上是减函数，则（　　）

A. $k>\frac{1}{2}$　　B. $k<\frac{1}{2}$　　C. $k>-\frac{1}{2}$　　D. $k<-\frac{1}{2}$

【答案】B

【解析】依题意有$2k-1<0$，解之即可.

3.函数 $y=ax^2+2x-3$在区间$(-\infty,4)$上单调递增，则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】$[-\frac{1}{4},0]$

【解析】当$a\neq 0$时，该函数是二次函数，画出函数草图，可判断出抛物线开口向下，即$a<0$，且对称轴在直线$x=4$右侧，故$\frac{2}{-2a}\geq 4$，解之得$a\geq -\frac{1}{4}$；易知当 $a=0$ 时也符合题意。综上所述$a\in[-\frac{1}{4},0]$.

4. 若函数 $f(x)=|2x+a|$的单调递增区间是$[3,+\infty)$，则 a=_______.

【答案】$a=-6$

【解析】由 $f(x)=\begin{cases}-2x-a, x<-\frac{a}{2}\\ 2x+a, x\geq\frac{a}{2}\end{cases}$，可得函数 $f(x)$ 的单调递增区间为$[-\frac{a}{2},+\infty)$，故$-\frac{a}{2}=3$，解得$a=-6$.

5.若函数 $f(x)=2x^2-kx$ 在区间 $(-1,1)$ 内不是单调函数，则实数 k 的取值范围是(　　　)

A．$[4,+?\ )$　　*B*．$[-4,4]$　　　*C*．$(-?\ \ ,4)$　　　*D*．$(-4,4)$

【答案】*B*

【解析】依题意只需对称轴在区间 $(-1,1)$ 内即可，故 $-1\ \#\frac{k}{4}\quad 1$，故选 *B*.